**Resumen del capítulo 4, Matemáticas para la computación**

**Kevin Osvaldo Vasquez De Los Santos**

**Instituto Tecnológico de las Américas (ITLA)**

**Tecnólogo en Telecomunicaciones**

**Ramon Antonio Gómez Florián**

**Santo Domingo, República Dominicana**

**21 de feb. del 2025**

**Capítulo 4: Lógica Matemática**

**4.1 Introducción**

La lógica matemática es una herramienta esencial en el ámbito de las matemáticas y la computación. Permite estructurar el razonamiento, validar la verdad de enunciados y construir bases sólidas para diversas aplicaciones en programación, inteligencia artificial, bases de datos y circuitos digitales. En este capítulo, se estudian los principios de la lógica proposicional y de predicados, sus reglas fundamentales y su aplicación en la resolución de problemas computacionales.

Este capítulo cubre los siguientes temas en detalle:

* Definición y tipos de proposiciones.
* Operadores lógicos y su significado.
* Construcción y análisis de tablas de verdad.
* Inferencias lógicas y argumentación.
* Equivalencias lógicas y demostraciones formales.
* Uso de cuantificadores en lógica de predicados.
* Aplicaciones prácticas en computación y ciencias exactas.
* Ejercicios prácticos para reforzar el aprendizaje.

**4.2 Proposiciones y Conectores Lógicos**

**4.2.1 Definición de Proposiciones**

Una proposición o enunciado es una oración, frase o expresión matemática que puede ser falsa o verdadera, pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática

Una **proposición** es un enunciado declarativo que puede tomar uno de dos valores: **verdadero (V)** o **falso (F)**. Ejemplos de proposiciones:

1. *"El agua hierve a 100°C."* → Verdadero.
2. *"5 es un número par."* → Falso.

Las proposiciones pueden clasificarse en:

* **Simples**: No pueden descomponerse en enunciados más pequeños.
* **Compuestas**: Se forman combinando proposiciones simples mediante operadores lógicos.

Existen conectores u operadores lógicos que permiten formar proposiciones “compuestas”. Se dice que una proposición es compuesta cuando está integrada por dos o más proposiciones simples conectadas por medio de operadores lógicos. A continuación, se describen los operadores o conectores lógicos básicos.

**Operador and (y)** Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Su símbolo es ^.

**Ejemplo 4.2.** Considérese el siguiente enunciado: “El automóvil arranca si y sólo si el tanque tiene gasolina y la batería tiene corriente.”

Sean:

p: El automóvil arranca.

q: El tanque tiene gasolina.

r: La batería tiene corriente.

De esta manera la representación del enunciado anterior, usando simbología lógica, es p = q ^ r

y su tabla de verdad es la siguiente:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **q** | **r** | **P= q^r** |
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **0** | **0** |
| 0 | **1** | **0** |
| **0** | **0** | **0** |

Aquí se tiene que:

1 = verdadero

0 = falso

En la tabla anterior el valor de q = 1 significa que el tanque tiene gasolina, r = 1 significa que la batería tiene corriente y p = q ^ r = 1 significa que el automóvil puede encender. Se puede notar que, si q o r valen cero, esto implica que el automóvil no tiene gasolina o bien la batería no tiene corriente, y que por lo tanto no puede encender.

**4.2.2 Operadores Lógicos**

Al operador lógico ^ se le conoce como la multiplicación lógica, porque

1 ^ 1 = 1

1 ^ 0 = 0

0 ^ 1 = 0

0 ^ 0 = 0

En lógica matemática en lugar del signo = se utilizan los signos = y para indicar equivalencia lógica, de forma que la proposición del ejemplo anterior puede indicarse como p = (q ^ r) o bien como p (q ^ r).

**Operador or (o)** Con este operador se obtiene un resultado falso cuando las dos proposiciones son falsas. Se indica por medio de los siguientes símbolos: {V, +,U}

Los operadores lógicos permiten conectar proposiciones y definir nuevas expresiones lógicas:

1. **Negación (¬P)**: Invierte el valor de la proposición.
2. **Conjunción (P ∧ Q)**: Es verdadera solo si ambas proposiciones lo son.
3. **Disyunción (P ∨ Q)**: Es verdadera si al menos una de las proposiciones lo es.
4. **Condicional (P → Q)**: Es falsa solo cuando P es verdadero y Q es falso.
5. **Bicondicional (P ↔ Q)**: Es verdadera si ambas proposiciones tienen el mismo valor.

Ejemplo de combinación de operadores:

* *"Si está nublado y llueve, entonces llevo paraguas."* → (N ∧ L) → P.

*Ejemplo*

Se tiene el siguiente enunciado: “Una persona puede entrar al cine si y sólo si compra su boleto o le regalan un pase.”

Sean:

**p:** Una persona entra al cine.

**q:** Compra su boleto.

**r**: Le regalan un pase.

De esta manera la representación del enunciado anterior con notación lógica es la siguiente:

p = (q v r)

y su tabla de verdad es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **q** | **r** | **P= q v r** |
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **0** | **1** |
| 0 | **1** | **1** |
| **0** | **0** | **0** |

A partir de la tabla se ve que la única forma en la que no puede ingresar al cine (p = 0), es que no compre su boleto (q = 0) y que no le regalen un pase (r = 0).

**4.2.3 Proposición bicondicional** ( )

Sean **p** y **q** dos proposiciones, entonces se puede indicar la proposición bicondicional de la siguiente forma:

**p q**

Esto se lee como “p si y sólo si q” en donde la proposición que representa el enunciado (p q) es verdadera si p es verdadera y si y sólo si q también lo es. O bien la proposición es verdadera si p es falsa y si sólo si q también lo es.

Usando los diferentes operadores lógicos expuestos, se pueden representar con notación lógica enunciados compuestos con más de una proposición.

**4.3 Tablas de Verdad**

Las tablas de verdad son herramientas fundamentales en lógica matemática, utilizadas para analizar los valores de las expresiones lógicas.

por medio de una tabla de verdad es posible mostrar los resultados obtenidos al aplicar cada uno de los operadores lógicos, así como el resultado de la proposición para todos y cada uno de los valores que pueden tener las diferentes proposiciones simples que integran una proposición compuesta. Con la tabla de verdad se puede observar con claridad el comportamiento particular y generalizado de una proposición y, con base en ello, determinar sus propiedades y características.

Una tabla de verdad está formada por fi las y columnas, y el número de fi las depende del número de proposiciones diferentes que conforman una proposición compuesta. Asimismo, el número de columnas depende del número de proposiciones que integran la proposición y del número de operadores lógicos contenidos en la misma.

Ejemplo de tabla de verdad para P → Q:

| **P** | **Q** | **P → Q** |
| --- | --- | --- |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

**4.3.1 Identificación de Tautologías, Contradicciones y Contingencias**

* **Tautología**: Tautología es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es (p’ v p), ya que el resultado es verdadero para todos los valores que puede tener p, como se muestra en la siguiente tabla de verdad

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **p’** | **p v p’** |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

* **Contradicción**: Se dice que una proposición es una contradicción o “absurdo” si al evaluar esa proposición el resultado es falso, para todos los valores de verdad. La contradicción más conocida es (p ^ p’) como se muestra en la siguiente tabla de verdad.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **p’** | **p ^ p’** |
| **0** | **1** | **0** |
| **1** | **0** | **0** |

* **Contingencia**: Una proposición compuesta cuyos valores, en sus diferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado unos y ceros se llama contingencia, inconsistencia o falacia. Prácticamente cualquier proposición que se invente por lo general es una contingencia. Considérese el siguiente ejemplo:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p’** | **q’** | **q’ v p’** | **(q’ v p’) p’** | **[(q’ v p) p’]^q** |
| **0** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **0** |
| **0** | **1** | **1** | **0** | **0** | **1** | **1** |
| **1** | **0** | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** |
| **1** | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** | **0** |

Tomando en cuenta el resultado final de esta tabla se dice que se trata de una contingencia.

**4.4 Inferencia lógica**

Los argumentos basados en tautologías representan métodos de razonamiento universalmente correctos. Su validez depende solamente de la forma de las proposiciones que intervienen y no de los valores de verdad de las variables que contienen. A esos argumentos y a la forma en que se relacionan entre sí se les llama reglas de inferencia, y éstas permiten relacionar dos o más proposiciones para obtener una tercera que es válida en una demostración.

Las reglas de inferencia permiten la creación de nuevas proposiciones a partir de información conocida. Posiblemente la obtención de la nueva proposición no sea difícil, pero sí el determinar qué regla de inferencia se deberá usar para obtener una proposición que sea de utilidad.

**4.5 Equivalencia lógica**

Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes, si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad, y se indican como p = q o bien como p q.

Ejemplo

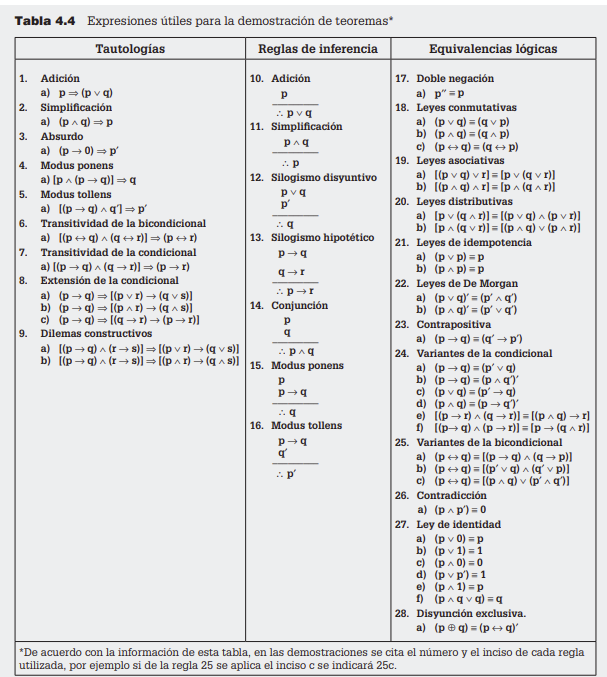
Considérese la siguiente tabla:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p’** | **q’** | **p q** | **q p** | **q’ p’** | **(p q’) ^(q p)** | **p q** |
| **0** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| **0** | **1** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| **1** | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** | **0** |
| **1** | **1** | **0** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |

equivalentes equivalentes

En esta tabla se puede observar que p q es lógicamente equivalente a su contra positiva q’ p’ ya que coinciden en todas sus líneas, por lo tanto, se dice que (p q) = (q’ p’). También la intersección de una proposición condicional con su recíproca es lógicamente equivalente a la proposición bicondicional, de manera que [(p q) ^ (q p)] = (p q).

Es posible demostrar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, no sólo por medio de una tabla de verdad como se hizo anteriormente, sino también con apoyo de las restantes equivalencias lógicas.

Debido a su utilidad en la demostración de teoremas, en la tabla 4.4 se presentan las principales tautologías, reglas de inferencia y equivalencias lógicas.

**4.6 Argumentos válidos y no válidos**

Un argumento consiste en una o más hipótesis y una conclusión, de forma que la conclusión se apoye en las hipótesis. También se puede considerar a un argumento como una serie de proposiciones interrelacionadas que conforman una proposición más compleja, a la cual se le llama teorema. Todos los argumentos necesitan de una o más proposiciones iniciales, y a estas proposiciones iniciales se les llama hipótesis. La conclusión de un argumento o teorema es una consecuencia de las hipótesis, por esa razón se requiere que las hipótesis sean convincentes y explícitas.

**En general los argumentos lógicos a tratar tienen la siguiente forma:**

P Q

La proposición P está integrada por proposiciones más simples llamadas hipótesis, las cuales se encuentran relacionadas por el operador lógico ^, y Q es la conclusión del teorema que también puede estar conformada por una o más proposiciones simples, de tal manera que el argumento puede tener la siguiente forma:



en donde P1, P2,…, Pn son las hipótesis y q es la conclusión del razonamiento.

La validez del argumento depende de la estructura existente entre las hipótesis y la conclusión, ya sea por la forma de conectar las hipótesis con la conclusión o por la veracidad de la conclusión misma. La validez es una propiedad de los argumentos. Un argumento puede tener otras propiedades como claro, confuso, endeble, convincente, grande, pequeño, feo o bonito y sin embargo puede no ser válido.

Ejemplo:

En este caso se muestra que un argumento también es válido cuando todas o alguna de las hipótesis es falsa, y la conclusión es verdadera.

Considérese lo siguiente:

“Las mujeres son jóvenes. Miss universo es mujer.

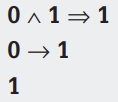
En conclusión, miss universo es joven.”

A partir de esto se definen:

p1: Las mujeres son jóvenes.

p2: Miss universo es mujer.

q: Miss universo es joven.

En el enunciado anterior la característica de joven es difícil de evaluar, ya que depende con quién se compare, pero suponiendo que una mujer es joven si tiene entre 17 y 30 años entonces se puede decir que p1 es “falsa”, porque hay mujeres que no son jóvenes; p2 es “verdadera” y q es “verdadera”. Aunque se tienen hipótesis falsas (con una que sea falsa es suficiente) y la conclusión verdadera, entonces el argumento es completamente válido. Considerando p1 = 0, p2 = 1 y q = 0 se tiene:

Hay que observar que para evaluar la validez de un argumento, se toma como base la proposición condicional.

La forma más fácil de determinar si un argumento es válido o no, cuando no se tienen los valores de las proposiciones, es por medio de la tabla de verdad. Si se trata de una tautología se dice que el argumento es válido, en caso contrario el argumento es inválido

**4.6.1 Tipos de argumentos**

Básicamente existen dos tipos de argumentos lógicos**: deductivos** e **inductivos**

* **Argumentos deductivos:** En un argumento deductivo se va de lo general a lo particular, se trata de un procedimiento que parte de un teorema que está formado por hipótesis y una conclusión. Se puede decir que se inicia con una explicación razonable para describir el comportamiento de un conjunto de datos, y que esa explicación se representa por medio de un teorema que deberá demostrarse formalmente por medio de leyes y reglas conocidas (tautologías, reglas de inferencia y equivalencias lógicas en el caso de lógica matemática). El argumento podrá ser válido o inválido. Un argumento deductivo válido se define como aquel que, siendo sus hipótesis ciertas, la conclusión también lo es.
* **Argumentos inductivos:**

En un argumento inductivo se va de lo particular a lo general, se puede decir que es el conjunto de observaciones y datos cuya tendencia per mite visualizar o generalizar el comportamiento de un evento. La veracidad de sus conclusiones se va reforzando con la generación de más y más datos que apuntan en una misma dirección.

**4.7 Demostración formal**

Generalmente los argumentos lógicos son razonamientos resultantes del enunciado de un problema que es posible representar, usando notación lógica, como una proposición condicional integrada por varias proposiciones simples, siempre y cuando se identifiquen claramente las proposiciones simples y los conectores lógicos que unen dichas proposiciones. Como se planteó anteriormente, por lo general a la proposición condicional que resulta del planteamiento de un problema se le llama argumento o teorema y tiene la forma , en donde P y Q son proposiciones compuestas. A las proposiciones que integran a P y que están conectadas por operadores ^ se les llama hipótesis y a la proposición Q se le llama conclusión.

Los teoremas representados con notación lógica, producto de un razonamiento, se pueden demostrar usando el “Método directo” o bien el “Método por contradicción” (que son métodos de demostración deductivos). Dependiendo de la naturaleza del teorema, algunas veces es más sencilla la demostración por el método directo y algunas veces es más fácil si se utiliza el método por contradicción.

**4.7.1 Demostración por el método directo**

Supóngase que P Q es el teorema resultante del planteamiento de un problema usando para ello notación lógica, y que P y Q son proposiciones compuestas en las que interviene cualquier número de proposiciones sim ples que conforman una serie de hipótesis consideradas verdaderas. Se dice que Q se desprende lógicamente de P, y que por lo tanto el teorema P Q es verdadero. Sin embargo, también P Q puede ser falso, si se presenta alguna inconsistencia en la demostración o planteamiento inicial.

Si

Y

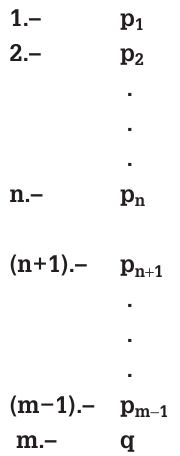


entonces el teorema por demostrar toma la forma:



en donde son hipótesis que se consideran verdaderas, ya que son parte del planteamiento del problema, y **q** es la conclusión a la cual se debe llegar para demostrar la validez del teorema, usando para ello reglas de inferencia, tautologías, equivalencias lógicas y las propias hipó tesis del problema. En la demostración se deben de colocar primero las hipótesis, seguidas de las proposiciones obtenidas al aplicar reglas de inferencia, tautologías y equivalencias lógicas, hasta llegar a la conclusión. Todas las líneas de la demostración se deben de numerar, con el fin de evitar confusiones en la obtención de nuevas proposiciones que se deben considerar verdaderas.

En general, las demostraciones formales deben de tener el siguiente formato:



Las líneas 1 a n son las hipótesis resultantes del enunciado a demostrar, y siempre se colocan al principio de la demostración. Las líneas (n + 1) a (m 1) son proposiciones obtenidas usando reglas de inferencia, tautologías o equivalencias lógicas, y finalmente la línea m es la conclusión q obtenida. Se puede decir que la demostración de un teorema dependerá de la lógica empleada por cada persona para relacionar la información que ya conoce por medio de reglas de inferencia, tautologías o equivalencias lógicas hasta llegar a la conclusión, y que el camino no es único. Algunas personas demostrarán el teorema por un camino corto y otras llegarán a la solución por una ruta más larga, porque la vinculación lógica de información es diferente en cada caso. Realmente la demostración de un teorema es equivalente a resolver un problema de la vida real, y como en ésta cada persona puede tener un procedimiento diferente para llegar a los mismos resultados siendo algunos mejores que otros porque dependen del manejo lógico de la información, de las herramientas utilizadas y de la experiencia del propio sujeto. No todas las personas logran resolver un problema determinado, sobre todo si nunca antes se han enfrentado a ese tipo de problema. Sucede lo mismo en lógica matemática: no todas las personas llegan a demostrar un teorema dado, ya que esto requiere de un razonamiento lógico para vincular la in formación. También es importante mencionar que no todos los problemas se pueden resolver de la misma manera, además de que no todos los teoremas son verdaderos, en cuyo caso es necesario demostrar que son falsos, lo cual se analizará más adelante. Si está bien planteado el problema, el número de hipótesis (1 a la n) no cambia, sin embargo, el número de proposiciones obtenidas entre (n + 1) y (m 1) varía dependiendo de las reglas de inferencia, tautologías o equivalencias lógicas que cada persona utilice para llegar a la conclusión.

**4.8 Predicados y sus valores de verdad**

La lógica de proposiciones es muy buena para inferir información cuando es posible determinar claramente si una proposición es falsa o verdadera, pero en la vida real prácticamente nada es totalmente falso o totalmente verdadero, ya que influyen muchos factores. El problema de la lógica de proposiciones es que no puede trabajar con proposiciones en donde una gran cantidad de elementos cumplen con ciertas características y otros no.

Sea la proposición:

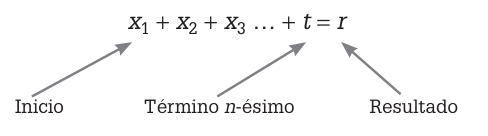
p: La puerta es verde.

¿Qué pasa si la puerta es verde a medias, es decir, si tiene espacios sin pintar? A pesar de esto, en la lógica proposicional se tiene que especificar si **p** es falsa o verdadera.

La lógica de predicados, o lógica de conjuntos, se basa en que las proposiciones son conjuntos de elementos que tienen una propiedad o característica llamada “predicado”, y en este contexto una proposición puede ser verdadera para un grupo de elementos de un conjunto, pero falsa para otro.

**4.9 Inducción matemática**

Como se mencionó anteriormente, una proposición es una oración, frase, igualdad o desigualdad, que puede ser falsa o verdadera, pero no ambas a la vez. La inducción matemática se utiliza cuando se desea probar si una expresión matemática (igualdad o desigualdad) es falsa o verdadera, sin necesidad de representarla con notación lógica. En computación es común desarrollar programas en donde se tiene un “valor inicial”, para la primera iteración, un incremento o decremento que puede ser aplicado por medio de una expresión matemática llamada término “n-ésimo”, que permite obtener los valores de una sumatoria en cada iteración y un “resultado” de la sumatoria, el cual también es posible representar en forma generalizada por medio de una expresión matemática. Esto implica que es posible re presentar algoritmos en forma matemática y probar si esos algoritmos son falsos o verdaderos, usando para ello inducción matemática. Para usar la inducción matemática en la demostración de algoritmos es necesario que éstos se representen como una sumatoria de la siguiente manera:



En la sumatoria anterior, el primer elemento x1 es el valor obtenido en la primera iteración (n = 1) y se conoce como valor inicial. El término n-ésimo t es una expresión matemática que permite encontrar cada uno de los elementos de la sumatoria y que deberá estar en función de n, ya que dependiendo del valor de n se determina si se trata del primero, segundo o n-ésimo elemento. Finalmente, el resultado r también es una expresión matemática en función de n que permite encontrar el resultado de sumar los n elementos de la sumatoria. La sumatoria anterior, incluyendo inicio, término n-ésimo y resultado, es la proposición P(n).

El principio de inducción matemática establece que la proposición P(n) es verdadera

si se cumplen las siguientes condiciones:

a) P(k) es verdadera cuando k = 1.

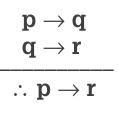
b) P(k) es cierta cuando k = n + 1.

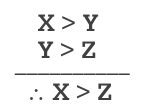
Al primer inciso se le conoce como “paso básico” y al segundo se le llama “paso inductivo”.

El método consiste en sustituir n = 1 en el n-ésimo término de la sumatoria. Si el resultado obtenido es igual al primer término de la sumatoria, se dice que se cumple el paso básico. En caso de que se cumpla el paso básico, se procede a probar si la proposición también es verdadera cuando k = n + 1. Se sustituye (n + 1) en lugar de n en el término n-ésimo de la sumatoria, se agrega dicho término en los dos lados de la igualdad, para que no se alte re, y se realizan algunas operaciones algebraicas hasta obtener una forma tal que sea fácil de sustituir k = n + 1. Si el resultado, que ahora está en función de k, tiene la misma forma que la igualdad en función de n, se dice que se cumple el paso inductivo y que, por lo tanto, la proposición P(n) es válida o verdadera. En caso de que no se cumpla el paso básico o inductivo se considera que P(n) es falsa.

**4.10 Aplicación de la lógica matemática**

La lógica matemática no es de reciente creación, no surgió con el uso de las computadoras, por el contrario, se ha consolidado en nuestro tiempo porque es una herramienta fundamental para mejorar el software y hardware que conocemos.

La historia de la lógica tiene sus inicios en el siglo III a. C. con la “Teoría silogista” de Aristóteles, quien introdujo los cuantificadores así como reglas de inferencia conocidas como el silogismo hipotético:

Esta regla se aplica en matemáticas y programación, algunas veces sin saber que se trata del silogismo hipotético:

También se encuentra disfrazada en algunas líneas de código de la siguiente manera:

If X > Y and Y > Z then X > Z

Aunque en sus inicios se usó principalmente para elaborar demostraciones matemáticas, en su aplicación a la programación el procedimiento de la demostración equivale a desarrollar un algoritmo para resolver un problema, usando para ello las instrucciones válidas (asignación, ciclos, lectura, escritura, declaración, etc.) de un lenguaje formal. Tanto el procedimiento de demostración como el diseño de algoritmos, dependen exclusivamente de la lógica usada por la persona que los desarrolla. Los caminos en ambas situaciones pueden ser más o menos eficientes, pero lo interesante en ambos casos es que permiten usar la creatividad y reflexión de la persona para lograr el objetivo, ya que no existe una forma única de demostrar un teorema o desarrollar un algoritmo.

Otra aplicación importante de la lógica matemática se encuentra en las bases de datos, en donde se consideran los archivos como relaciones que pueden manipularse por medio de operadores lógicos para obtener nuevos reportes de información, dando origen a lo que se conoce como “álgebra relacional” en la cual se basan todos los manejadores de bases de datos conocidos. Las redes de computadoras también utilizan el concepto de relación para representar la comunicación entre computadoras, de forma que es posible realizar operaciones lógicas entre matrices booleanas para obtener características necesarias en una red. Por todo lo anterior, se puede decir que la lógica matemática es esencial en la computación ya que permite sentar las bases para el entendimiento formal de práctica mente todas las áreas de ésta (bases de datos, programación, inteligencia artificial, lenguajes formales, sistemas digitales, redes, etcétera).